JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **8**, 210–248 (1973)

Nicht-lineare gleichmäßige Simultanapproximation*

HANS-PETER BLATT

Institut für Angewandte Mathematik I der Universität, Erlangen-Nürnberg, Deutschland

Communicated by G. Meinardus

Received July 15, 1971

DEDICATED TO PROFESSOR I. J. SCHOENBERG ON THE OCCASION OF HIS 70TH BIRTHDAY

EINLEITUNG

Bei der Suche nach einer besten Approximierenden einer stetigen Funktion f auf einem kompakten Raum bezüglich eines Funktionensystems V ist es von Vorteil, wenn sich Invarianzeigenschaften der Funktion f auch auf Minimallösungen übertragen (Meinardus [13]), weil dadurch unter Umständen das Approximationssystem wesentlich eingeschränkt werden kann, ohne daß die Minimalabweichung geändert wird. Meinardus [13] gab dazu folgendes Beispiel: $f(x, y)$ sei stetig auf einem kompakten Bereich der reellen (x, y)-Ebene, der bei einer Drehung um $2\pi/3$ in sich übergeht. Ist $f(x, y)$ bei dieser Drehung invariant und betrachtet man die Approximation durch Polynome

$$\sum_{\substack{\nu+\mu\leqslant 2\\ \nu\geqslant 0,\,\mu\geqslant 0}} \alpha_{\nu\mu} x^{\nu} y^{\mu}$$

vom Grad $\leqslant 2$, so gibt es Minimallösungen der Form $\alpha + \beta(x^2 + y^2)$.

Führt man Polarkoordinaten (r, ϕ) ein, dann kann man das Problem zu der Aufgabe überführen, eine oberhalbstetige Funktion f^+ und eine unterhalbstetige Funktion f^- auf einem kompakten Bereich $B \subset \mathbb{R}$ gleichzeitig bezüglich $\{\alpha + \beta r^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ zu approximieren. Dabei haben f^+ und f^- noch die Eigenschaft: $f^+(r) \geqslant f^-(r)$ für alle $r \in B$.

Eine andere praktische Motivierung der Simultanapproximation erkennt man, wenn man eine Funktion approximiert, die auf einer Rechenmaschine durch Intervallarithmetik gefunden wurde. Diese Funktion hänge beispielsweise von reellen Parametern ab, für die man nur obere und untere Schranken

* Erster Teil der am Institut für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes in Saarbrücken angefertigten Dissertation des Verfassers (1970).

angeben kann. Dan ist es sinnvoller, alle die Funktionen, deren Parameter in diesem Zulässigkeitsbereich liegen, gleichzeitig bezüglich der vorgegebenen Approximationsmenge zu approximieren als irgendeine von ihnen.

Dunham [11] hat das erstgenannte Problem, eine oberhalbstetige Funktion f^+ und eine unterhalbstetige Funktion f^- mit $f^+(x) \geqslant f^-(x)$ für alle $x \in B$ gleichzeitig zu approximieren, für $B = [a, b]$ und unisolvent Approximationsfunktionen (vgl. Rice [16]) untersucht. Er zeigte, daß eine Minimallösung entweder durch einen Straddlepunkt oder durch eine Alternante charakterisiert wird. Im letzteren Fall ist die Minimallösung auch eindeutig. Diaz und McLaughlin [9] bewiesen, daß man die Simultanapproximation einer Menge von gleichmäßig beschränkten, reellwertigen Funktionen auf die Simultanapproximation einer oberhalbstetigen und einer unterhalbstetigen Funktion zurückführen kann.

Kürzlich betrachteten Diaz und McLaughlin [10] die gleichzeitige Approximation einer Menge von gleichmäßig beschränkten, komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten, metrischen Raum B bezüglich eines n-dimensionalen Haarschen Unterraums von $C(B)$. Sie zeigten, daß dieses Problem so umgeformt werden kann, daß die Approximation einer oberhalbstetigen Abbildung $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ vorliegt ($\mathscr{K}(\mathbb{C})$ = Menge der kompakten Teilmengen $\neq \emptyset$ von $\mathbb{C}$). Weiter bewiesen sie, daß für eine Minimallösung eine Modifizierung des Kolmogoroffschen Kriteriums notwendig und hinreichend ist. Ihre Arbeit enthält ferner einen Existenz- und einen Eindeutigkeitssatz.

In dieser Arbeit soll die nicht-lineare Simultanapproximation betrachtet werden. Im Gegensatz zu Diaz und McLaughlin [10] geben wir direkt eine oberhalbstetige Abbildung vor und approximieren diese bezüglich einer Menge stetiger Funktionen: B sei ein kompakter Raum und $S(B)$ der lineare Raum der auf B beschränkten, komplexwertigen Funktionen. Durch $\|f\| := \sup_{x\in B} |f(x)|$ wird $S(B)$ ein normierter Raum. $C(B)$ sei die Menge der auf B stetigen, komplexwertigen Funktionen ($C(B) \subset S(B)$) und V eine Teilmenge von $C(B)$.

Aufgabe (A1): Zu einer vorgegebenen oberhalbstetigen Abbildung (Definition 1.1) $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ suchen wir ein Element $v_0 \in V$ der Art, daß

$$\sup_{x\in B} \sup_{z\in H(x)} |v_0(x) - z| \leqslant \sup_{x\in B} \sup_{z\in H(x)} |v(x) - z|$$

für jedes Element $v \in V$. Ein solches Element heißt Minimallösung von H bezüglich V und die Zahl $\inf_{v\in V} \sup_{x\in B} \sup_{z\in H(x)} |v(x) - z|$ heißt Minimalabweichung. Wir bezeichnen sie mit $\rho_V(H)$.

Das verallgemeinerte Kolmogoroffsche Kriterium ist stets hinreichend für eine Minimallösung (Satz 3.2), aber im allgemeinen nicht notwendig. Jedoch gelingt es, eine Klasse von Funktionensystemen (wir nennen sie in Analogie zu Brosowski [5] stark regulär (Definition 3.2)) zu definieren, die gerade dadurch charakterisiert werden, daß für sie das verallgemeinerte Kolmogoroff-Kriterium notwendig ist.

Hängen die approximierenden Funktionen von einem Parameter ab und sind sie nach diesem Parameter Fréchet-differenzierbar, so läßt sich ein notwendiges Kriterium der gewöhnlichen Tschebyscheff-Approximation von Meinardus und Schwedt [14], das die Fréchet-Ableitung benutzt, auf die Simultanapproximation verallgemeinern (Satz 3.9). Darüberhinaus kann man ein weiteres notwendiges Kriterium mittles konvexer Mengen, ähnlich denen von Cheney und Loeb [7], Brosowski [3, 4, 5] angeben (Satz 3.10). Beide Kriterien erweisen sich als hinreichend, falls das Funktionensystem V zusätzlich asymptotisch konvex und der Bedingung (B) genügt (Satz 3.11 und Satz 3.12).

Durch Einführen von Extremalmengen (Definition 3.4) erhält man ein hinreichendes Kriterium für die Eindeutigkeit der Minimallösung bei stark regulären Funktionensystemen (Satz 3.13). Für Systeme, die zusätzlich nach dem Parameter differenzierbar sind und der lokalen Haarschen Bedingung genügen, wird ein weiteres hinreichendes Kriterium bewiesen, das sich für asymptotisch konvexe Funktionensysteme, die der Bedingung (B) genügen, noch vereinfacht (Satz 3.15 und Satz 3.16). Entsprechende Kriterien wurden bei Approximation einer stetigen Funktion durch Elemente asymptotisch konvexer bzw. regulärer Funktionensysteme von Meinardus und Schwedt [14] und Brosowski [3, 4, 5] bewiesen.

1. Topologische Hilfsmittel und Bezeichnungen

X sei ein topologischer Raum. Ist $x \in X$, dann bezeichnen wir mit $U(x)$ und $W(x)$ Umgebungen von x in X. Für $E \subset X$ bedeutet $\mathscr{C}E$ das Komplement von E in X, $\bar{E}$ die abgeschlossene Hülle von E und $\mathring{E}$ das Innere von E. Weiter sei

$$\mathscr{A}(X) := \{E \subset X \mid E \neq \emptyset\}$$

$$\mathscr{K}(X) := \{E \subset X \mid E \text{ kompakt und } E \neq \emptyset\}.$$

Definition 1.1 (Hahn [12], Michael [15]). Sind X und Y topologische Räume, dann heißt eine Abbildung $f\colon X \to \mathscr{A}(Y)$ *oberhalbstetig in* $x \in X$, wenn es zu jeder in Y offenen Menge G mit $f(x) \subset G$ eine Umgebung $U(x)$ gibt, so daß $f(U(x)) \subset G$ ist.

Dabei ist für $E \subset X$ die Bildmenge $f(E)$ definiert als $f(E) := \{y \in Y \mid$ es gibt ein $x \in E$ mit $y \in f(x)\}$.

Diese Oberhalbstetigkeit muß man sehr wohl von der bei reellwertigen Funktionen unterscheiden.

DEFINITION 1.2 (Bourbaki [2]). Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt *oberhalbstetig in* $x \in X$, falls zu jeder reellen Zahl $h > f(x)$ eine Umgebung $U(x)$ existiert mit $f(x') < h$ für alle $x' \in U(x)$.

Analog definiert man unterhalbstetige Funktionen.

DEFINITION 1.3. Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig in* $x \in X$, falls zu jeder reellen Zahl $h < f(x)$ eine Umgebung $U(x)$ existiert mit $f(x') > h$ für alle $x' \in U(x)$.

Gilt die Eigenschaft von Definition 2.1 (2.2 bzw. 2.3) jeweils für alle $x \in X$, dann sprechen wir von einer oberhalbstetigen Abbildung (oberhalbstetigen bzw. unterhalbstetigen Funktion).

SATZ 1.1. *Ist X kompakt und $f: X \to \mathscr{K}(Y)$ eine oberhalbstetige Abbildung, dann ist $f(X)$ kompakt in Y.*

Beweis (vgl. Michael [15] oder Berge [1]). Wir wollen noch erwähnen, was wir unter kompakt genau verstehen: Ein topologischer Raum X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Überdeckung enthält.

SATZ 1.2. *Ist X kompakt und $f: X \to \mathbb{R}$ eine oberhalbstetige (unterhalbstetige) Funktion, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in X$ mit*

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x) \ (f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)).$$

Beweis (vgl. Bourbaki [2]). Wir brauchen noch eine Definition über Mengen A und B in einem metrischen Raum M.

DEFINITION 1.4. Die *obere Entfernung* zweier Mengen A und B in einem metrischen Raum M wird definiert durch

$$\bar{d}(A, B) = \bar{d}(B, A) := \sup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b),$$

wobei d die Metrik von M ist.

Für die obere Entfernung der Mengen A und B gilt die Dreiecksungleichung:

$$\bar{d}(A, B) \leqslant \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B), \qquad \text{wobei} \quad C \subset M \text{ ist.}$$

Ist S eine Teilmenge eines linearen Raumes, dann bezeichnen wir mit $\operatorname{conv}(S)$ die konvexe Hülle von S.

In der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ setzen wir

$$U_\epsilon(z) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z - z'| < \epsilon\}.$$

Mit $\bar{z}$ bezeichnen wir die zu z konjugiert komplexe Zahl und mit $\mathrm{Re}(z)$ den Realteil von z. Sind $c, d \in \mathbb{C}^n$, so bezeichnen wir mit $\langle c, d\rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$.

Außerdem benutzen wir die Abkürzung o.B.d.A. für ohne Beschränkung der Allgemeinheit.

2. Simultanapproximation mehrerer Funktionen und Approximation oberhalbstetiger Abbildungen

Diaz und McLaughlin [10] betrachteten folgende Situation: F sei eine nichtleere Menge von gleichmäßig beschränkten, komplexwertigen Funktionen auf dem kompakten, metrischen Raum B mit der Metrik d, V ein n-dimensionaler Haarscher Unterraum von $C(B)$. Gesucht ist ein $v_0 \in V$ mit

$$\inf_{v\in V} \sup_{f\in F} \| f - v \| = \sup_{f\in F} \| f - v_0 \|.$$

Definiert man für $x \in B$

$$h(x) := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{es existiert } f \in F \text{ mit } f(x) = z\}$$

und

$$H(x) := \bigcap_{\epsilon>0} \left(\overline{\bigcup_{d(x,y)<\epsilon} h(y)} \right), \tag{2.1}$$

dann ist H eine oberhalbstetige Abbildung und beide Autoren zeigten:

$$\sup_{f\in F} \| f - v \| = \sup_{x\in B} \sup_{z\in H(x)} | z - v(x)| = \sup_{x\in B} \bar{d}(v(x), H(x)). \tag{2.2}$$

Die ursprüngliche Aufgabe ist also übergeführt zu der Aufgabe, eine oberhalbstetige Abbildung bezüglich V zu approximieren.

Wir betrachten nun die etwas allgemeinere Situation: F sei eine nichtleere Familie von gleichmäßig beschränkten, komplexwertigen Funktionen auf dem kompakten Raum B, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, d.h. jeder Punkt von B besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis. V sei eine Teilmenge von $C(B)$. Nun definieren wir die Abbildung H durch

$$H(x) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es existiert eine Folge } \{(x_n, z_n)\} \text{ mit} \\ (1)\ x_n \in B \\ (2)\ x_n \to x \text{ für } n \to \infty \\ (3)\ z_n \in h(x_n) \\ (4)\ z_n \to z \text{ für } n \to \infty \end{array} \right\}. \tag{2.3}$$

Diaz und McLaughlin [10] zeigten schon, daß diese Definition von H zu (2.1) äquivalent ist, falls B ein metrischer Raum ist.

HILFSSATZ 2.1. *H wie in* (2.3) *ist eine oberhalbstetige Abbildung von B in* $\mathcal{K}(\mathbb{C})$.

Beweis. Nehmen wir indirekt an, H sei in $x_0 \in B$ nicht oberhalbstetig, d.h. es existiert eine offene Umgebung G von $H(x_0)$, so daß für jede Umgebung $U(x_0)$ gilt: Es existiert ein $\xi \in U(x_0)$ mit $H(\xi) \not\subset G$. Sei nun $\{U_n\}$ Umgebungsbasis von x_0 mit

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots, \qquad \text{und} \qquad x_n \in U_n \qquad \text{mit} \quad H(x_n) \not\subset G,$$

z.B. $z_n \in H(x_n)$ und $z_n \notin G$.

Dann gilt $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$, und zu $\{z_n\}$ gibt es einen Häufungspunkt z_0, da die Folge beschränkt ist. Wir können o.B.d.A. annehmen: $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$.

Da $z_n \in H(x_n)$, gibt es eine Folge $\{(\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})\}$ mit

(1) $\xi_k^{(n)} \in B$,

(2) $\xi_k^{(n)} \to x_n$ für $k \to \infty$,

(3) $\eta_k^{(n)} \in h(\xi_k^{(n)})$,

(4) $\eta_k^{(n)} \to z_n$ für $k \to \infty$.

Wir wählen nun zu (x_n, z_n) die Zahl k_n so, daß

(1) $\xi_{k_n}^{(n)} \in U_n$,

(2) $|\eta_{k_n}^{(n)} - z_n| < 1/n$.

Dann gilt für die Folge $\{(\xi_{k_n}^{(n)}, \eta_{k_n}^{(n)})\}$:

(1) $\xi_{k_n}^{(n)} \in B$,

(2) $\xi_{k_n}^{(n)} \to x_0$ für $n \to \infty$,

(3) $\eta_{k_n}^{(n)} \in h(\xi_{k_n}^{(n)})$,

(4) $\eta_{k_n}^{(n)} \to z_0$ für $n \to \infty$.

Also ist $z_0 \in H(x_0)$, im Widerspruch zu $z_0 \notin G$.

Auf ähnliche Weise zeigt man, daß $H(x_0)$ abgeschlossen ist. Da F gleichmäßig beschränkt ist, ist $H(x_0)$ beschränkt, also kompakt.

Hilfssatz 2.2. *Ist $v \in V$, dann gilt*:

$$\sup_{f\in F} \|f - v\| = \sup_{x\in B} \sup_{z\in H(x)} |z - v(x)| = \sup_{x\in B} \bar{d}(v(x), H(x)).$$

Beweis. Da $h(x) \subset H(x)$ für alle $x \in B$, folgt für jedes $f \in F$ und jedes $x \in B$:

$$|f(x) - v(x)| \leqslant \bar{d}(v(x), H(x)) \quad \text{und} \quad \|f - v\| \leqslant \sup_{x\in B} \bar{d}(v(x), H(x)).$$

Also gilt auch:

$$\sup_{f\in F} \|f - v\| \leqslant \sup_{x\in B} \bar{d}(v(x), H(x)).$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Ungleichung umkehrbar ist: Dazu sei $\{(x_n, z_n)\}$ eine Folge mit $x_n \in B$,

$$z_n \in H(x_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n - v(x_n)| = \sup_{x\in B} \sup_{z\in H(x)} |z - v(x)|.$$

Da $z_n \in H(x_n)$, gibt es wie im Beweis von Hilfssatz 2.1 eine Folge $\{(\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})\}$ mit den dort angegebenen Eigenschaften. Sei nun k_n so gewählt, daß

$$(1) \quad |\eta_{k_n}^{(n)} - z_n| < 1/n$$

$$(2) \quad |v(\xi_{k_n}^{(n)}) - v(x_n)| < 1/n.$$

Weil $\eta_{k_n}^{(n)} \in h(\xi_{k_n}^{(n)})$, gibt es ein Element $f_{k_n} \in F$ mit $f_{k_n}(\xi_{k_n}^{(n)}) = \eta_{k_n}^{(n)}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|f_{k_n} - v\| &\geqslant |f_{k_n}(\xi_{k_n}^{(n)}) - v(\xi_{k_n}^{(n)})| = |\eta_{k_n}^{(n)} - v(\xi_{k_n}^{(n)})| \\ &\geqslant |v(x_n) - z_n| - |v(x_n) - v(\xi_{k_n}^{(n)})| - |\eta_{k_n}^{(n)} - z_n| \\ &> |v(x_n) - z_n| - 2/n.\end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$\sup_{f\in F} \|f - v\| \geqslant \lim_{n\to\infty} |v(x_n) - z_n| = \sup_{x\in B} \sup_{z\in H(x)} |z - v(x)|.$$

Aus diesen beiden Hilfssätzen ergibt sich also, daß wir die ursprüngliche Aufgabe übergeführt haben zu dem Problem, eine oberhalbstetige Abbildung $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ zu approximieren.

B sei nun ein kompakter Raum, $V \subset C(B)$, und eine oberhalbstetige

Abbildung $H: B \to \mathscr{A}(\mathbb{C}_K)$ sei bezüglich V zu approximieren. Dabei ist $\mathbb{C}_K := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leqslant K\}$ und $K > 0$.

Für jedes $v \in V$ gilt:

$$\bar{d}(v(x), H(x)) = \sup_{z \in H(x)} |v(x) - z| = \max_{z \in \overline{H(x)}} |v(x) - z|. \tag{2.4}$$

Betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{H} : B &\to \mathscr{K}(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \overline{H(x)}, \end{aligned}$$

so wollen wir zeigen, daß $\bar{H}$ ebenfalls oberhalbstetig ist: Sei $x_0 \in B$ und G eine offene Umgebung von $\overline{H(x_0)}$. Da $\overline{H(x_0)}$ kompakt ist, gibt es eine abgeschlossene Umgebung G_1 von $H(x_0)$ mit $G_1 \subset G$. $\mathring{G}_1$ ist aber auch Umgebung von $H(x_0)$. Zu $\mathring{G}_1$ existiert nun eine Umgebung $U(x_0)$, so daß $H(x) \subset \mathring{G}_1$ für alle $x \in U(x_0)$. Dann folgt aber auch:

$$\overline{H(x)} \subset G_1 \subset G \qquad \text{für alle} \quad x \in U(x_0).$$

Also ist $\bar{H}$ oberhalbstetig.

Aus (2.4) folgt:

$$\sup_{x \in B} \bar{d}(v(x), H(x)) = \sup_{x \in B} \bar{d}(v(x), \bar{H}(x)).$$

Wir dürfen uns also in allen Fällen auf das Problem beschränken, eine oberhalbstetige Abbildung $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ bezüglich V zu approximieren (Aufgabenstellung (A1)).

HILFSSATZ 2.3. *Setzt man* $g_v(x) := \bar{d}(v(x), H(x))$ *für die oberhalbstetige Abbildung* $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ *und* $x \in B$, *dann ist* g_v *eine auf* B *oberhalbstetige Funktion.*

Beweis. Sei $x_0 \in B$ und $h > g_v(x_0)$: Wir setzen $\epsilon := (h - g_v(x_0))/2$ und $U := \bigcup_{z \in H(x_0)} U_\epsilon(z)$. U ist offen und $H(x_0) \subset U$. Da H oberhalbstetig ist in x_0, existiert eine Umgebung $W_1(x_0)$ mit $H(x) \subset U$ für alle $x \in W_1(x_0)$. Zu jedem $\xi \in H(x)$ mit $x \in W_1(x_0)$ existiert also ein $z_\xi \in H(x_0)$ mit $|\xi - z_\xi| < \epsilon$. Also gilt für $x \in W_1(x_0)$:

$$\begin{aligned} \bar{d}(v(x_0), H(x)) &= \sup_{\xi \in H(x)} |v(x_0) - \xi| \\ &\leqslant \sup_{\xi \in H(x)} \{|v(x_0) - z_\xi| + |z_\xi - \xi|\} \\ &\leqslant \sup_{z \in H(x_0)} |v(x_0) - z| + \epsilon \\ &= \bar{d}(v(x_0), H(x_0)) + \epsilon. \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $x \in B$:

$$g_v(x) \leqslant \bar{d}(v(x), v(x_0)) + \bar{d}(v(x_0), H(x))$$
$$= | v(x) - v(x_0) | + \bar{d}(v(x_0), H(x)).$$

Da $v(x)$ stetig ist in x_0, existiert eine Umgebung $W_2(x_0)$, so daß $| v(x) - v(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in W_2(x_0)$.

Damit gilt für $x \in W_1(x_0) \cap W_2(x_0)$:

$$g_v(x) < g_v(x_0) + 2\epsilon = h.$$

Also ist g_v in x_0 oberhalbstetig.

Nach Satz 1.2 nimmt g_v auf dem kompaktem Raum B ihr Maximum an:

$$\sup_{x \in B} \bar{d}(v(x), H(x)) = \max_{x \in B} \bar{d}(v(x), H(x)).$$

Wir wollen noch einige Bezeichnungen einführen:

$$\Delta(v) := \max_{x \in B} \bar{d}(v(x), H(x))$$

$$\mathfrak{M}(v) := \{x \in B \mid \bar{d}(v(x), H(x)) = \Delta(v)\}$$

$$D[H, v] := \{(x, z) \in B \times \mathbb{C} \mid z \in H(x) \text{ und } | v(x) - z | = \Delta(v)\}$$
$$\mathfrak{N}[H, v, x] := \{z \in H(x) \mid | v(x) - z | = \bar{d}(v(x), H(x))\}.$$

Die Mengen $\mathfrak{M}(v)$, $D[H, v]$ und $\mathfrak{N}[H, v, x]$ sind nicht leer.

HILFSSATZ 2.4. *$\mathfrak{M}(v)$ is abgeschlossen in B.*

Beweis. Sei $x \in \mathscr{C}\mathfrak{M}(v)$, d.h. $g_v(x) = \bar{d}(v(x), H(x)) < \Delta(v)$: Da g_v oberhalbstetig ist, existiert eine Umgebung $U(x)$ mit $g_v(x') < \Delta(v)$ für alle $x' \in U(x)$.

Also ist $\mathscr{C}\mathfrak{M}(v)$ offen und damit $\mathfrak{M}(v)$ abgeschlossen.

HILFSSATZ 2.5. *$D[H, v]$ ist kompakt in $B \times \mathbb{C}$.*

Beweis. $\mathscr{C}D[H, v] = \{(x, z) \in B \times \mathbb{C} \mid z \notin H(x) \text{ oder } | v(x) - z | < \Delta(v)\}$.

(a) $(x_0, z_0) \in \mathscr{C}D[H, v]$ mit $z_0 \notin H(x_0)$: Dann existieren offene Umgebungen U_1 und U_2 von $H(x_0)$ bzw. z_0 mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Da $H(x)$ oberhalbstetig ist, gibt es eine offene Umgebung $W(x_0)$, so daß $H(x) \subset U_1$ für alle $x \in W(x_0)$.

Dann gilt auch

$$H(x) \cap U_2 = \varnothing \qquad \text{für alle} \quad x \in W(x_0).$$

$W \times U_2$ ist eine offene Umgebung von (x_0, z_0) in $B \times \mathbb{C}$ und $W \times U_2 \subset \mathscr{C}D[H, v]$.

(b) $(x_0, z_0) \in \mathscr{C}D[H, v]$ mit $|v(x_0) - z_0| < \Delta(v)$: Da $|v(x) - z|$ eine stetige Funktion von $B \times \mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ ist, gibt es eine offene Umgebung U von (x_0, z_0) mit $|v(x) - z| < \Delta(v)$ für $(x, z) \in U$.

Aus (a) und (b) folgt: $D[H, v]$ ist abgeschlossen in $B \times \mathbb{C}$. Da nach Satz 1.1 die Bildmenge von H beschränkt in $\mathbb{C}$ ist, ist $D[H, e]$ kompakt.

3. Simultanapproximation mit allgemeinen Funktionensystemen

Ein Einschließungssatz für bie Minimalabweichung und ein hinreichendes Kriterium für eine Minimallösung

Durch den folgenden Satz wird die Minimalabweichung $\rho_V(H)$ zwischen zwei reellen Zahlen eingeschlossen. Dieser Satz umfaßt als Spezialfälle den Einschließungssatz von Collatz [8] für lineare und den von Meinardus und Schwedt [14] für nichtlineare Tschebyscheffapproximation einer stetigen Funktion.

Satz 3.1. *v_1 sei ein Element aus V und D eine Teilmenge von B mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $z - v_0(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$ *und* $z \in \mathfrak{N}[H, v_0, x]$

(2) *Es gibt kein* $v \in V$, *so daß für alle* $x \in D$ *und* $z \in \mathfrak{N}[H, v_0, x]$ *der Ausdruck*

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} > 0 \textit{ ist.}$$

Dann gilt:

$$\inf_{x \in D} \bar{d}(v(x), H(x)) \leq \rho_V(H) \leq \Delta(v_0).$$

Beweis. Nimmt man indirekt an, es sei $\rho_V(H) < \inf_{x \in D} \bar{d}(v_0(x), H(x))$, dann gibt es ein $v \in V$ mit

$$\rho_V(H) \leq \Delta(v) < \inf_{x \in D} \bar{d}(v_0(x), H(x)).$$

Insbesondere gilt für $x \in D$:

$$\bar{d}(v(x), H(x)) < \bar{d}(v_0(x), H(x)).$$

Also gilt für $x \in D$ und $z \in \mathfrak{N}[H, v_0, x]$:

$$|v(x) - z| < |v_0(x) - z|$$

oder

$$0 < |v_0(x) - z| - |v(x) - z|.$$

Wegen (1) folgt dann:

$$\begin{aligned}
0 &< |v_0(x) - z| [|v_0(x) - z| - |v(x) - z|] \\
&= |v_0(x) - z|^2 - |v_0(x) - z| \cdot |v(x) - z| \\
&\leqslant (v_0(x) - z)\overline{(v_0(x) - z)} - \mathrm{Re}\{\overline{(v_0(x) - z)}(v(x) - z)\} \\
&= \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\}
\end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (2).

Aus diesem Satz ergibt sich sofort ein hinreichendes Kriterium für eine Minimallösung.

SATZ 3.2. *Ist $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ oberhalbstetig, $v_0 \in V$ und gilt für jedes $v \in V$ die Ungleichung*

$$\min_{(x,z) \in D[H, v_0]} \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \leqslant 0,$$

dann ist v_0 Minimallösung zu H bezüglich V.

Beweis. (a) Ist $z - v_0(x) = 0$ für ein $(x, z) \in D[H, v_0]$, dann ist v_1 Minimallösung zu H.

(b) Ist $z - v_0(x) \neq 0$ für alle $(x, z) \in D[H, v_0]$, dann gilt nach Satz 3.1:

$$\Delta(v_0) \geqslant \rho_V(H) \geqslant \inf_{x \in \mathfrak{M}(v_0)} \bar{d}(v_0(x), H(x)) = \Delta(v_0).$$

Also ist v_0 Minimallösung zu H bezüglich V.

Stark reguläre Funktionensysteme. Notwendige Kriterien für eine Minimallösung. Beispiele.

Das Kriterium von Satz 3.2 ist nicht notwendig, wie sich schon in einem Spezialfall der Simultanapproximation, der Approximation einer einzigen Funktion, zeigt (Meinardus und Schwedt [14]). Brosowski [5] stellt deshalb für diesen Fall eine zusätzliche Bedingung an die Approximationsmenge V, er führt reguläre Funktionensysteme ein.

DEFINITION 3.1. Eine Teilmenge $V \subset C(B)$ heißt *regulär bei* $v_0 \in V$, wenn für jedes $v \in V$ und für jede kompakte Teilmenge $B' \subset B$ und für jede auf B' stetige Funktion f: $B' \to \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{Re}\{\overline{f(x)}(v(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad \text{für} \quad x \in B'$$

und für jede reelle Zahl $\lambda > 0$ ein Element $v_\lambda \in V$ existiert mit den Eigenschaften:

(R1) $2\,\mathrm{Re}\{\overline{f(x)}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > |v_\lambda(x) - v_0(x)|^2 \qquad \text{für} \quad x \in B'$,

(R2) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

Brosowski [5] nennt *V regulär*, wenn V regulär bei jedem $v_0 \in V$ ist.

Für die Simultanapproximation reicht diese Forderung an die Approximationsfunktionen nicht aus. Wir müssen stärkere Voraussetzungen an V stellen und führen deshalb *stark reguläre* Funktionensysteme ein.

DEFINITION 3.2. Eine Teilmenge $V \subset C(B)$ heißt *stark regulär bei* $v_0 \in V$, wenn für jedes $v \in V$ und für jede kompakte Teilmenge $B^* \subset B \times \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad \text{für} \quad (x, z) \in B^*$$

und für jede reelle Zahl $\lambda > 0$ ein Element $v_\lambda \in V$ existiert mit den Eigenschaften:

(SR1) $2\,\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > |v_\lambda(x) - v_0(x)|^2$

für $(x, z) \in B^*$,

(SR2) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

Bemerkung. Diese Definition ist auch zu gebrauchen, falls man wie Brosowski [5] Abbildungen von B in einen unitären Raum U betrachtet. Man muß nur für $\mathbb{C}$ überall U einsetzen und den Realteil des Skalarproduktes in U betrachten.

Wir nennen nun *V stark regulär*, wenn V stark regulär ist bei jedem $v_0 \in V$.

Als erstes wollen wir untersuchen, wie die Begriffe regulär und stark regulär zusammenhängen.

SATZ 3.3. *Ist V stark regulär bei $v_0 \in V$, dann ist V regulär bei v_0.*

Beweis. Sei $B' \subset B$ kompakt und $f\colon B' \to \mathbb{C}$ stetig. Weiterhin sei

$$\operatorname{Re}\{\overline{f(x)}(v(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad \text{für} \quad x \in B'.$$

Wir setzen

$$B^* := \{(x, z) \in B \times \mathbb{C} \mid x \in B' \text{ und } z = f(x) + v_0(x)\}.$$

Da f und v_0 stetig sind, ist B^* kompakt.

Für $(x, z) \in B^*$ gilt:

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} > 0.$$

Also existiert zu $\lambda > 0$ ein Element $v_\lambda \in V$ mit den Eigenschaften (SR1) und (SR2).

(SR2) ist äquivalent zu (R2) und (SR1) zu (R1), denn

$$2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} = 2 \operatorname{Re}\{\overline{f(x)}(v_\lambda(x) - v_0(x))\}$$

für $(x, z) \in B^*$.

Man kann noch weitergehendere Aussagen machen, falls man unter $C(B)$ die Menge der stetigen, *reellwertigen* Funktionen über B versteht. In den Definitionen 3.1 und 3.2 ist dann an jeder Stelle $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ zu ersetzen.

SATZ 3.4. *Ist $C(B)$ die Menge der über B stetigen, reellwertigen Funktionen, dann ist $V \subset C(B)$ genau dann stark regulär bei $v_0 \in V$, wenn V regulär ist bei v_0.*

Beweis. Die Notwendigkeit zeigt man wie im Beweis von Satz 3.3. Hinlänglichkeit:

$V \subset C(B)$ sei regulär bei $v_0 \in V$. Weiter sei $v \in V$ und B^* kompakt in $B \times \mathbb{R}$ mit

$$(z - v_0(x))(v(x) - v_0(x)) > 0 \qquad \text{für} \quad (x, z) \in B^*.$$

Da B^* kompakt ist, gibt es eine Zahl $a > 0$ mit

$$|z - v_0(x)| \geq a \qquad \text{für} \quad (x, z) \in B^*.$$

Wir definieren nun eine Funktion f auf

$$B' := \{x \in B \mid (x, z) \in B^* \text{ für mindestens ein } z \in \mathbb{R}\}$$

auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} f\colon B' &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a \cdot \operatorname{sgn}(v(x) - v_0(x)). \end{aligned}$$

B' ist kompakt in B. Wir behaupten weiter, daß f auf B' stetig ist:

Ist nämlicht $x_0 \in B'$, dann ist $v(x_0) - v_0(x_0) = b \neq 0$.

Es gibt also eine offene Umgebung $U(x_0)$ in B, so daß

$$\operatorname{sgn}(v(x) - v_0(x)) = \operatorname{sgn}(b) \qquad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Damit gilt für $x \in U \cap B'$:

$$f(x) = a \operatorname{sgn}(b).$$

f ist also auf B' stetig.

Da nun V regulär ist bei x_0, gibt es zu jedem $\lambda > 0$ ein Element $v_\lambda \in V$ mit:

(1) $2f(x)(v_\lambda(x) - v_0(x)) > |v_\lambda(x) - v_0(x)|^2$ für $x \in B'$,

(2) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

(2) ist äquivalent zu (SR2). Da für $(x, z) \in B^*$ gilt:

$$|f(x)| \leqslant |z - v_0(x)|$$

und

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn}(v(x) - v_0(x)) = \operatorname{sgn}(z - v_0(x)),$$

folgt für $(x, z) \in B^*$:

$$\begin{aligned} 2(z - v_0(x))(v_\lambda(x) - v_0(x)) &\geqslant 2f(x)(v_\lambda(x) - v_0(x)) \\ &> |v_\lambda(x) - v_0(x)|^2. \end{aligned}$$

Also ist (SR1) erfüllt.

SATZ 3.5. *$V \subset C(B)$ sei stark regulär bei $v_0 \in V$ und H: $B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ oberhalbstetig. Dann ist v_0 genau dann eine Minimallösung zu H, falls für jedes $v \in V$ gilt:*

$$\min_{(x,z) \in D[H, v_0]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \leqslant 0.$$

Beweis. Die Hinlänglichkeit folgt aus Satz 3.2. Notwendigkeit: Wir nehmen indirekt an, es gebe ein $v \in V$ mit

$$\min_{(x,z) \in D[H, v_0]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} = a > 0.$$

Bilden wir

$$U := \{(x, z) \in B \times H(B) \mid \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} > a/2\},$$

dann ist U wegen der Stetigkeit von $\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\}$ offen in $B \times H(B)$. Außerdem ist $D[H, v_0] \subset U$.

Für jedes $(x, z) \in \overline{U} \subset B \times H(B)$ gilt:

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \geqslant a/2.$$

Wegen der starken Regularität von V bei v_0 gibt es zu jeder reellen Zahl $\lambda > 0$ ein $v_\lambda \in V$ mit:

(1) $2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > |v_\lambda(x) - v_0(x)|^2$ für $(x, z) \in \overline{U}$,

(2) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

Für jedes $(x, z) \in U$ gilt nun die Abschätzung:

$$\begin{aligned} | v_\lambda(x) - z |^2 &= | v_\lambda(x) - v_0(x) + v_0(x) - z |^2 \\ &= | v_0(x) - z |^2 - 2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} \\ &\quad + | v_\lambda(x) - v_0(x)|^2 \\ &< | v_0(x) - z |^2. \end{aligned}$$

Zu $W_1 := B \times H(B) - U$ betrachten wir die Punktmenge

$$W := \{(x, z) \in W_1 \mid z \in H(x)\}$$

und wollen zeigen, daß W abgeschlossen ist in $B \times H(B)$:

Das Komplement von W in $B \times H(B)$ ist

$$\mathscr{C} W = \{(x, z) \in B \times H(B) \mid (x, z) \in U \text{ oder } z \notin H(x)\}.$$

Wir machen zwei Fallunterscheidungen:

(a) $(x_0, z_0) \in \mathscr{C} W$ mit $(x_0, z_0) \in U$: Dann ist U eine offene Umgebung von (x_0, z_0) in $B \times H(B)$ mit $U \subset \mathscr{C} W$.

(b) $(x_0, z_0) \in \mathscr{C} W$ mit $z_0 \notin H(x_0)$: Wie im Beweis von Hilfssatz 2.5(a) existieren in $H(B)$ offene Umgebungen U_1 und U_2 von $H(x_0)$ bzw. z_0 mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Da H oberhalbstetig ist, gibt es eine offene Umgebung $W_2(x_0)$ in B, so daß $H(x) \subset U_1$ für alle $x \in W_2(x_0)$. Dann gilt auch:

$$H(x) \cap U_2 = \varnothing \qquad \text{für alle} \quad x \in W_2(x_0).$$

$W_2 \times U_2$ ist eine offene Umgebung von (x_0, z_0) in $B \times H(B)$ mit $W_2 \times U_2 \subset \mathscr{C}W$.

Aus (a) und (b) folgt: W ist abgeschlossen in $B \times H(B)$. Damit ist W auch kompakt und es gilt:

$$E^* := \max_{(x,z)\in W} | v_0(x) - z | < \Delta(v_0).$$

Wir wählen nun $0 < \lambda < \Delta(v_0) - E^*$. Dann gilt für $(x, z) \in W$:

$$\begin{aligned} | v_\lambda(x) - z | &\leqslant | v_\lambda(x) - v_0(x)| + | v_0(x) - z \\ &< \lambda + E^* < \Delta(v_0). \end{aligned}$$

Damit gilt $\Delta(v_\lambda) < \Delta(v_0)$

Im folgenden wollen wir zeigen, daß die bei v_0 stark regulären Funktionensysteme gerade durch die Bedingung

$$\min_{(x,z)\in D[H, v_0]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \leqslant 0$$

charakterisiert werden, wenn v_0 Minimallösung zur oberhalbstetigen Abbildung H ist. Im Gegensatz zu Brosowski [5], der einen ähnlichen Charakterisierungssatz für reguläre Funktionensysteme hergeleitet hat, benutzen wir im Beweis nicht den Erweiterungssatz für stetige Abbildungen von J. Dugundji, sondern konstruieren die erforderlichen Abbildungen aus bereits vorgegebenen. Deshalb gilt unser Satz auch für kompakte Räume, die nicht metrisch sind.

Satz 3.6. *Eine Teilmenge $V \subset C(B)$ ist genau dann stark regulär bei $v_0 \in V$, wenn gilt: Ist v_0 eine Minimallösung für die oberhalbstetige Abbildung $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$, so gilt für jedes Element $v \in V$:*

$$\min_{(x,z)\in D[H, v_0]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \leqslant 0.$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung wurde in Satz 3.5 gezeigt. Hinlängigkeit: Gegeben seien ein Element $v \in V$ und eine kompakte Teilmenge $B^* \subset B \times \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \geqslant \alpha > 0 \qquad \text{für} \quad (x, z) \in B^*$$

und eine reelle Zahl $\lambda > 0$. Da B^* kompakt ist, gibt es eine reelle Zahl $\beta > 0$ mit

$$| z - v_0(x)| \geqslant \beta \qquad \text{für} \quad (x, z) \in B^*.$$

Wir bilden nun die Mengen:

$$B_1^* := \{(x, z) \in B \times \mathrm{pr}_2(B^*) \mid |z - v_0(x)| \geqslant \beta\}$$

$$B_2^* := \{(x, z) \in B \times \mathrm{pr}_2(B^*) \mid |z - v_0(x)| \leqslant \beta\}$$

$$B_3^* := \{(x, z) \in B \times \mathrm{pr}_2(B^*) \mid \alpha \leqslant \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\}\}$$

$$B_4^* := \{(x, z) \in B \times \mathrm{pr}_2(B^*) \mid 0 \leqslant \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \leqslant \alpha\}$$

$$B_5^* := \{(x, z) \in B \times \mathrm{pr}_2(B^*) \mid \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \leqslant 0\}.$$

Dabei ist pr_2 die Projektion auf die zweite Komponente. Es ist klar, daß $B^* \subset B_1^* \cap B_3^*$. Die Funktionen

$$g_1(x, z) := \begin{cases} \dfrac{z - v_0(x)}{|z - v_0(x)|}\beta & \text{für} \quad (x, z) \in B_1^*, \\ z - v_0(x) & \text{für} \quad (x, z) \in B_2^*, \end{cases}$$

und

$$g_2(x, z) := \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad (x, z) \in B_3^*, \\ \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} & \text{für} \quad (x, z) \in B_4^*, \\ 0 & \text{für} \quad (x, z) \in B_5^*, \end{cases}$$

sind in $B \times \mathrm{pr}_2(B^*)$ stetig.

Zu $G := (1/\alpha\beta)\, g_1 \cdot g_2$ betrachten wir die Abbildung

$$f(x, z) := \tfrac{1}{2}\min(\beta, \lambda)\, G(x, z) + v_0(x)$$

von $B \times \mathrm{pr}_2(B^*)$ in $\mathbb{C}$ und definieren für $x \in B$

$$H(x) := f(x, \mathrm{pr}_2(B^*)).$$

Wir behaupten: $H\colon B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ ist oberhalbstetig.

Da G bezüglich z stetig ist, ist $H(x)$ kompakt für jedes $x \in B$. Sei jetzt $x_0 \in B$ und U eine offene Umgebung von $H(x_0)$. Da $H(x_0)$ kompakt ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $U_\epsilon(\xi) \subset U$ für jeden Punkt $\xi \in H(x_0)$. $G(x, z)$ ist in $B \times \mathrm{pr}_2(B^*)$ stetig, also existieren zu ϵ und $(x_0, z) \in B \times \mathrm{pr}_2(B^*)$ offene Umgebungen $W_z(x_0)$ in B und $W(z)$ in $\mathrm{pr}_2(B^*)$ von x_0 bzw. z mit

$$|G(x_0, z) - G(x, \eta)| < \frac{\epsilon}{\min(\beta, \lambda)} \qquad \text{für} \quad (x, \eta) \in W_z(x_0) \times W(z).$$

$\bigcup_{z \in \mathrm{pr}_2(B^*)} W(z)$ ist eine offene Überdeckung von $\mathrm{pr}_2(B^*)$, deshalb gibt es wegen der Kompaktheit von $\mathrm{pr}_2(B^*)$ n Punkte $z_1, \dots, z_n$ in $\mathrm{pr}_2(B^*)$, so daß $\bigcup_{i=1}^{n} W(z_i)$ eine offene Überdeckung von $\mathrm{pr}_2(B^*)$ ist. Setzen wir

$$W_1 := \bigcap_{i=1}^{n} W_{z_i}(x_0).$$

dann ist W_1 offene Umgebung von x_0 und

$$| G(x_0, z) - G(x, z)| < \frac{\epsilon}{\min(\beta, \lambda)} \qquad \text{für} \quad (x, z) \in W_1 \times \mathrm{pr}_2(B^*).$$

Da v_0 in B stetig ist, gibt es eine offene Umgebung W_2 von x_0 in B mit $| v_0(x_0) - v_0(x)| < \epsilon/2$ für $x \in W_2$.

Damit gilt für $(x, z) \in (W_1 \cap W_2) \times \mathrm{pr}_2(B^*)$:

$$\begin{aligned} | f(x_0, z) - f(x, z)| &\leqslant \tfrac{1}{2}\min(\beta, \lambda) \, | G(x_0, z) - G(x, z)| + | v_0(x_0) - v_0(x)| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

also $f(x, z) \in U$.

Daher ist $H(x) \subset U$ für $x \in W_1 \cap W_2$ und die Behauptung bewiesen. Die Abbildung H hat das Element v_0 nicht als Minimallösung, denn es gilt:

$$D[H, v_0] = \{(x, \eta) \in B \times \mathbb{C} \mid (x, z) \in B_1^* \cap B_3^* \text{ und } \eta = f(x, z)\}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{(\eta - \overline{v_0(x))(v(x)} - v_0(x))\} &= \mathrm{Re}\{\tfrac{1}{2} \overline{\min(\beta, \lambda) \, G(x, z)}(v(x) - v_0(x))\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\min(\beta, \lambda)}{| z - v_0(x)|} \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \\ &> 0 \qquad \text{für} \quad (x, \eta) \in D[H, v_0]. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist also v_0 keine Minimallösung zu H, es gibt daher ein Element $v_\lambda \in V$ mit $\Delta(v_\lambda) < \Delta(v_0) = \frac{1}{2}\min(\beta, \lambda)$. Dann ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \| v_0 - v_\lambda \| &= \max_{x \in B} \bar{d}(v_0(x), v_\lambda(x)) \\ &\leqslant \max_{x \in B} \{\bar{d}(v_0(x), H(x)) + \bar{d}(v_\lambda(x), H(x))\} \qquad (3.1) \\ &\leqslant \Delta(v_0) + \Delta(v_\lambda) < \lambda. \end{aligned}$$

Für jeden Punkt $(x, \eta) \in D[H, v_0]$ gilt:

$$\begin{aligned} |\eta - v_\lambda(x)|^2 &= |\eta - v_0(x) - (v_\lambda(x) - v_0(x))|^2 \\ &= |\eta - v_0(x)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\{\overline{(\eta - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} \\ &\quad + |v_\lambda(x) - v_0(x)|^2 \\ &< |\eta - v_0(x)|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $(x, z) \in B^*$ und $\eta = f(x, z)$:

$$\begin{aligned} |v_\lambda(x) - v_0(x)|^2 &< 2\,\mathrm{Re}\{\overline{(\eta - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} \\ &= \frac{\min(\beta, \lambda)}{|z - v_0(x)|}\,\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} \qquad (3.2) \\ &\leqslant \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x)\}. \end{aligned}$$

Aus (3.1) und (3.2) folgt die starke Regularität von V bei v_0.

Wir wollen nun die stark regulären Funktionensysteme auf eine andere Art charakterisieren: Gilt $\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} > 0$, so muß der Winkel zwischen $z - v_0(x)$ und $v(x) - v_0(x)$ dem Betrag nach kleiner als $\pi/2$ sein. Der Vektor $z - v_0(x)$ liegt also in der schraffierten Halbebene (Abb. 1). Nun muß aber auch

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad \text{für alle} \quad (x, z) \in B^* \text{ sein.}$$

Hat man wie in Abb. 1 zwei Vektoren $z_1 - v_0(x)$ und $z_2 - v_0(x)$ mit (x, z_1) und (x, z_2) aus B^*, so bleibt für $v_\lambda(x) - v_0(x)$ nur der Winkelraum $\mathscr{L}$ übrig.

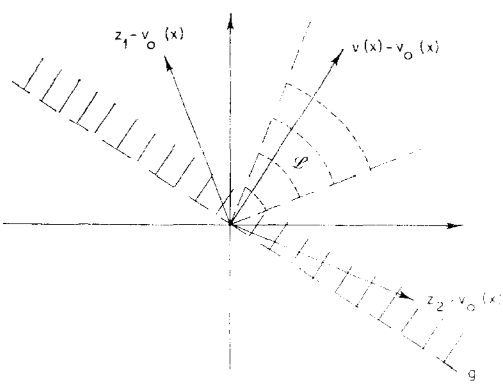

ABBILDUNG 1.

Dieser Winkelraum wird um so kleiner, je näher $z_1 - v_0(x)$ und $z_2 - v_0(x)$ an die Grenzgerade g rücken. Durch diese Betrachtung wird man zu folgender Definition angeregt.

DEFINITION 3.3. Eine Teilmenge $V \subset C(B)$ heißt *asymptotisch punktweise konvex bei $v_0 \in V$*, wenn für jedes $v \in V$ und jede kompakte Teilmenge $B' \subset B$, auf der $v(x) - v_0(x) \neq 0$ ist, und zu jeder reellen Zahl $\lambda > 0$ und jeder Zahl ϵ mit $0 < \epsilon < \pi/2$ ein $v_\lambda^\epsilon \in V$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

(APK1) $v_\lambda^\epsilon(x) - v_0(x) \neq 0$ für $x \in B'$,

(APK2) $\phi(x) - \epsilon < \phi_\lambda^\epsilon(x) < \phi(x) + \epsilon$ für $x \in B'$,

wobei $e^{i\phi(x)} = \operatorname{sgn}(v(x) - v_0(x))$ und $e^{i\phi_\lambda^\epsilon(x)} = \operatorname{sgn}(v_\lambda^\epsilon(x) - v_0(x))$,

(APK3) $\| v_\lambda^\epsilon - v_0 \| < \lambda$.

Dabei ist die Funktion $\operatorname{sgn} z$ für $z \neq 0$ definiert durch $\operatorname{sgn} z := z/|z|$ und für $z = 0$ durch $\operatorname{sgn} z := 0$.

SATZ 3.7. *$V \subset C(B)$ ist genau dann asymptotisch punktweise konvex bei $v_0 \in V$, wenn V stark regulär ist bei v_0.*

Beweis. (a) V sei stark regulär bei $v_0 \in V$: Sei $v \in V$ und $v(x) - v_0(x) \neq 0$ auf der kompakten Teilmenge $B' \subset B$. Weiter sei $\lambda > 0$ und $0 < \epsilon < \pi/2$ vorgegeben. Wir setzen für $x \in B'$

$$e^{i\phi(x)} = \frac{v(x) - v_0(x)}{|v(x) - v_0(x)|}$$

mit $-\pi < \phi(x) \leqslant \pi$ und bilden zu jedem $x \in B'$ die Paare:

$$(x, z_1(x)) \quad \text{mit} \quad z_1(x) = v_0(x) + e^{i(\phi(x)+(\pi/2)-\epsilon)},$$

$$(x, z_2(x)) \quad \text{mit} \quad z_2(x) = v_0(x) + e^{i(\phi(x)-(\pi/2)+\epsilon)}$$

Bildet man

$$B_1 := \{(x, z) \in B \times \mathbb{C} \mid x \in B' \text{ und } z = z_1(x)\}$$

und

$$B_2 := \{(x, z) \in B \times \mathbb{C} \mid x \in B' \text{ und } z = z_2(x)\},$$

dann sind B_1 und B_2 kompakt, also auch ihre Vereinigung $B^* = B_1 \cup B_2$.

Für $(x, z) \in B^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \\
&\quad = \operatorname{Re}\{e^{i(-\phi(x) \pm (\pi/2) \mp \epsilon)} \, |v(x) - v_0(x)| \, e^{i\phi(x)}\} \\
&\quad = |v(x) - v_0(x)| \cos((\pi/2) - \epsilon) = |v(x) - v_0(x)| \sin \epsilon.
\end{aligned}$$

Da B' kompakt ist, gibt es ein $a > 0$ mit

$$|v(x) - v_0(x)| \geqslant a \qquad \text{für alle} \quad x \in B'.$$

Also gilt für alle $(x, z) \in B^*$:

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \geqslant a \sin \epsilon > 0.$$

Aus der starken Regularität von V bei v_0 folgt dann, es existiert $v_\lambda \in V$ mit

(1) $\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad$ für $\quad (x, z) \in B^*$,

(2) $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

Setzen wir nun $v_\lambda^\epsilon = v_\lambda$, dann ergibt sich aus (1) die Bedingung (APK1) und auch (APK2), denn der Winkel zwischen $v_\lambda(x) - v_0(x)$ und $z - v_0(x)$ muß dem Betrage nach kleiner als $\pi/2$ sein. Betrachtet man dies für $(x, z_1(x))$ und $(x, z_2(x))$, so ergibt sich sofort (APK2). (APK3) ist äquivalent zu (2).

(b) V sei asymptotisch punktweise konvex bei $v_0 \in V$: B^* sei kompakt in $B \times \mathbb{C}$ und

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad \text{für} \quad (x, z) \in B^*.$$

Also ist

$$\alpha := \inf_{(x,z) \in B^*} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} > 0.$$

Sei nun $\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x)) = a(x, z) + ib(x, z)$, dann gibt es eine Konstante $K > 0$ mit

$$|b(x, z)| \leqslant K \qquad \text{für alle} \quad (x, z) \in B^*.$$

Wir wählen $0 < \epsilon < \pi/2$ so, daß $\tan \epsilon < \alpha/K$ oder gleichbedeutend damit: $\alpha \cos \epsilon - K \cdot \sin \epsilon > 0$. Zu vorgegebenem $\lambda > 0$ bestimmen wir eine Zahl λ_1 als

$$\lambda_1 := \min\left(\lambda, \frac{\alpha \cdot \cos \epsilon - K \cdot \sin \epsilon}{\| v - v_0 \|}\right)$$

Da V asymptotisch punktweise konvex ist bei $v_0 \in V$, gibt es ein Element $v_{\lambda_1}^{\epsilon} \in V$ mit

(1) $v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x) \neq 0$ und

$$\phi(x) - \epsilon < \phi_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) < \phi(x) + \epsilon$$

für alle x aus der Projektion von B^* auf $B(= B')$

(2) $\| v_{\lambda_1}^{\epsilon} - v_0 \| < \lambda_1 \leqslant \lambda$.

Wegen (1) gibt es eine Funktion $\delta(x)$ mit $|\delta(x)| < \epsilon$, so daß $\phi_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) = \phi(x) + \delta(x)$ für $x \in B'$.

Dann gilt für alle $(x, z) \in B^*$:

$$\begin{aligned}
&2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0 x))\} - | v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x)|^2 \\
&\quad > | v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x)| \, [2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}\, e^{i\phi_{\lambda_1}^{\epsilon}(x)}\} - \lambda_1] \\
&\quad = | v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x)| \left[\frac{2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\, e^{i\delta(x)}\}}{| v(x) - v_0(x)|} - \lambda_1\right] \\
&\quad = | v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x)| \left[\frac{2(a(x, z) \cdot \cos \delta(x) - b(x, z) \cdot \sin \delta(x))}{| v(x) - v_0(x)|} - \lambda_1\right] \\
&\quad > | v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x)| \left[\frac{2(\alpha \cdot \cos \epsilon - K \cdot \sin \epsilon)}{| v(x) - v_0(x)|} - \lambda_1\right] \\
&\quad \geqslant | v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x)| \left[\frac{2(\alpha \cdot \cos \epsilon - K \cdot \sin \epsilon)}{\| v - v_0 \|} - \lambda_1\right] \\
&\quad \geqslant \lambda_1 \, | v_{\lambda_1}^{\epsilon}(x) - v_0(x)| > 0.
\end{aligned}$$

Die Funktion $v_{\lambda_1}^{\epsilon}$ genügt also den Bedingungen (SR1) und (SR2).

Wir haben beim Beweis dieses Satzes in Teil (a) von der starken Regularität bei $v_0 \in V$ anstatt (SR1) nur die schwächere Bedingung

(SR1a) $\quad \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad$ für $\quad (x, z) \in B^*$

benötigt. Es ergibt sich also als direkte Folgerung des vorstehenden Satzes.

SATZ 3.8. *Ist $C(B)$ die Menge der über B stetigen, komplexwertigen Funktionen, dann ist $V \subset C(B)$ genau dann stark regulär bei $v_0 \in V$, wenn man in der Definition* 3.2 *die Bedingung* (SR1) *durch* (SR1a) *ersetzt.*

Es soll darauf hingewiesen werden, daß dieser Satz nur bewiesen ist, falls man die starke Regularität auf dem Raum der stetigen Abbildungen von B in einen von $\mathbb{C}$ verschiedenen unitären Raum betrachtet.

Wir wollen nun einige Beispiele stark regulärer Funktionensysteme behandeln.

BEISPIEL 3.1 (Punktweise konvexe Funktionen). $V \subset C(B)$ heißt nach Brosowski [5] punktweise konvex, wenn zu jedem Paar von Elementen v, $v_0 \in V$ und zu jeder kompakten Teilmenge $B' \subset B$, auf der $|v(x) - v_0(x)| \neq 0$ ist, und zu jeder reellen Zahl $\lambda > 0$ ein Element $v_\lambda \in V$ existiert, so daß $\operatorname{sgn}(v(x) - v_0(x)) = \operatorname{sgn}(v_\lambda(x) - v_0(x))$ für $x \in B'$ und $\| v_\lambda - v_0 \| < \lambda$.

Die punktweise konvexen Funktionensysteme sind also eine Teilmenge der asymptotisch punktweise konvexen und deshalb auch stark regulär. Falls $C(B)$ die Menge der über B stetigen, reellwertigen Funktionen ist, zeigte Brosowski [5], daß die punktweise konvexen und die regulären Funktionensysteme übereinstimmen. Somit ist in diesem Fall auch punktweise konvex mit stark regulär identisch.

Als Beispiele für punktweise konvexe Funktionen seien genannt (Brosowski [5]):

(a) Lineare Funktionen. V ist hier ein linearer Teilraum von $C(B)$.

(b) Rationale Funktionen. P und Q seien lineare Teilräume des linearen Raumes $C(B)$ der auf B stetigen, reellen Funktionen. V sei die Menge aller Quotienten $(p/q)(p \in P,\ q \in Q)$ mit auf B positivem Nenner.

BEISPIEL 3.2 (Asymptotisch konvexe Funktionensysteme). V sei eine Menge von Elementen $v(a, x)$ aus $C(B)$, die von einem Parameter $a \in A$ abhängen. Nach Meinardus und Schwedt [14] heißt V asymptotisch konvex, wenn zu jedem Paar a, b der Parametermenge A und zu jedem reellen t mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ ein Parameter $a(t) \in A$ und eine auf $B \times [0, 1]$ reellwertige, stetige Funktion $g(x, t)$ existiert, so daß

(AK1) $g(x, 0) > 0$ für $x \in B$,

(AK2) $\|((1 - tg(\cdot, t))\, v(a, \cdot) + tg(\cdot, t)\, v(b, \cdot) - v(a(t), \cdot)\| = o(t)$ für $t \to 0$ ist.

Es seien nun $v(a, x)$ und $v(b, x)$ Elemente eines asymptotisch konvexen Funktionensystems V. Weiterhin sei B' kompakt in B mit $v(b, x) - v(a, x) \neq 0$ für alle $x \in B'$. Da V asymptotisch konvex ist, gibt es zu jedem t mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ einen Parameter $a(t)$, so daß für $x \in B$ gilt:

$$v(a(t), x) = (1 - tg(x, t))\, v(a, x) + tg(x, t)\, v(b, x) + th(x, t),$$

wobei $\lim_{t\to 0} \|h(\cdot, t)\| = 0$. Durch eine Umformung erhält man:

$$v(a(t), x) - v(a, x) = t[g(x, t)(v(b, x) - v(a, x)) + h(x, t)] \tag{3.3}$$

und

$$|v(a(t), x) - v(a, x)| \leqslant t[K \| v(b, \cdot) - v(a, \cdot)\| + \| h(\cdot, t)\|],$$

wobei

$$K = \max_{(x,t)\in B\times[0,1]} |g(x, t)|.$$

Also gilt:

$$\| v(a(t), \cdot) - v(a, \cdot)\| = o(1) \qquad \text{für} \quad t \to 0. \tag{3.4}$$

Wegen der Kompaktheit von B' gibt es eine Zahl $\alpha > 0$ mit

$$| v(b, x) - v(a, x)| \geqslant \alpha \qquad \text{für alle} \quad x \in B'.$$

Sei $G = \min_{x\in B} g(x, 0)$, dann ist $G > 0$, und wir wählen $0 < t_x \leqslant 1$ und eine offene Umgebung $U(x) \subset B$ so, daß

$$g(\xi, t) > G/2 \qquad \text{für} \quad (\xi, t) \in U(x) \times [0, t_x[.$$

Da B kompakt ist, gibt es nun ein t_0 mit $0 < t_0 \leqslant 1$ und

$$g(x, t) \geqslant G/2 \qquad \text{für} \quad (x, t) \in B \times [0, t_0].$$

Für $0 \leqslant t \leqslant t_0$ und $x \in B'$ folgt aus (3.3):

$$\begin{aligned} &v(a(t), x) - v(a, x) \\ &\quad = tg(x, t)(v(b, x) - v(a, x)) \left[1 + \frac{h(x, t)}{g(x, t)(v(b, x) - v(a, x))}\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dabei ist

$$\left| \frac{h(x, t)}{g(x, t)(v(b, x) - v(a, x))} \right| \leqslant \frac{2 \| h(\cdot, t)\|}{G \cdot \alpha}$$

Also ist für $2 \| h(\cdot, t)\|/(G \cdot \alpha) < 1$ das Argument der komplexen Zahl $1 + h(x, t)/[g(x, t)(v(b, x) - v(a, x))]$ dem Betrag nach kleiner als $\pi \| h(\cdot, t)\|/(G \cdot \alpha)$. Aus (3.5) folgt also mit $\lim_{t\to 0} \| h(\cdot, t)\| = 0$ die Bedingungen (APK1) und (APK2). (APK3) folgt aus (3.4). V ist damit asymptotisch punktweise konvex, also stark regulär.

Gerade die linearen, rationalen und asymptotisch konvexen Funktionensysteme wurden von Brosowski [5] als Beispiele regulärer Funktionensysteme angegeben. Es stellt sich also die berechtigte Frage, ob die stark regulären Funktionensysteme überhaupt eine echte Teilmenge der regulären darstellen. Wir betrachten dazu diesem Beispiel.

Beispiel 3.3. B sei eine einpunktige Menge, jede stetige, komplexwertige Funktion auf B wird also durch einen Punkt in der komplexen Ebene repräsentiert: $C(B) \simeq \mathbb{C}$. Als Teilmenge V in $\mathbb{C}$ wählen wir

$$\begin{aligned} V := \{0\} &\cup \{x + iy \mid 0 < |x| \leq 1 \text{ und } x^2 \leq y < 2|x|\} \\ &\cup \{x + iy \mid 1 \leq |x| < \infty \text{ und } x^2 \leq y < x^2 + 1\}, \end{aligned}$$

die wir durch Abb. 2 veranschaulichen.

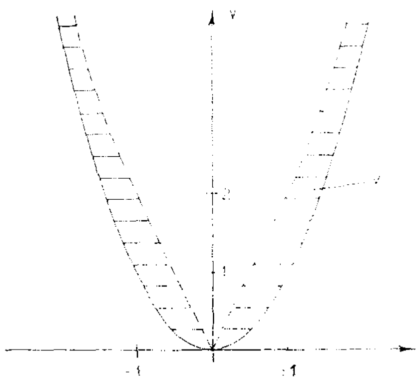

Abbildung 2.

Bei jedem inneren Punkt $v_0 \in V$ ist V asymptotisch punktweise konvex, also regulär und stark regulär, ebenso bei jedem Randpunkt von V, der verschieden von null ist. V ist jedoch nicht asymptotisch punktweise konvex im Nullpunkt: man kann zum Beispiel $v = 3 + 9i$ wählen. Dagegen wollen wir zeigen, daß V regulär im Nullpunkt ist: Sei also $v \in V$ gegeben und $f \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{Re}\{\bar{f}((v - v_0)\} = \mathrm{Re}\{\bar{f}v\} > 0.$$

Dann kann f nicht auf der negativen imaginären Achse liegen. Weiter sei $\lambda > 0$ vorgegeben. Wir machen 3 Fallunterscheidungen:

(1) $f = x + iy$ mit $x > 0$: Sei $\epsilon > 0$ und $v_\epsilon := \epsilon + i\epsilon^2$, dann ist $v_\epsilon \in V$ und wir können ein $\epsilon_0 > 0$ so bestimmen, daß

(a) $2(x + y\epsilon_0) > \epsilon_0 + \epsilon_0^3$,
(b) $\epsilon_0^2 + \epsilon_0^4 < \lambda$.

Für v_{ϵ_0} gilt dann:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\{\bar{f} v_{\epsilon_0}\} &= 2\,\mathrm{Re}\{(x - iy)(\epsilon_0 + i\epsilon_0^2)\} \\ &= 2 \cdot \epsilon_0(x + y\epsilon_0) > \epsilon_0^2 + \epsilon_{0\delta} = |\, v_{\epsilon_0} |^2. \end{aligned}$$

Für $v_\lambda := v_{\epsilon_0}$ ist also (R1) und (R2) erfüllt.

(2) $f = x + iy$ mit $x < 0$: In diesem Fall setzen wir für $\epsilon > 0$ $v_\epsilon := -\epsilon + i\epsilon^2$. Wieder ist $v_\epsilon \in V$ und wir wählen ein ϵ_0 so, daß

(a) $2(-x + y\epsilon_0) > \epsilon_0 + \epsilon_0^3$,
(b) $\epsilon_0^2 + \epsilon_0^4 < \lambda$.

Für v_{ϵ_0} gilt dann:

$$2\,\mathrm{Re}\{\bar{f} v_{\epsilon_0}\} = 2 \cdot \epsilon_0(-x + y\epsilon_0) > |\, v_{\epsilon_0} |^2.$$

Also ist für $v_\lambda := v_{\epsilon_0}$ (R1) und (R2) erfüllt.

(3) $f = iy$ mit $y > 0$: Sei $\epsilon > 0$ und $v_\epsilon := \epsilon + i\epsilon$, dann ist $v_\epsilon \in V$ für $0 < \epsilon \leqslant 1$ und wir können ein ϵ_0 so bestimmen, daß

(a) $0 < \epsilon_0 \leqslant 1$,
(b) $\epsilon_0 < y$,
(c) $2\epsilon_0^2 < \lambda$.

Für v_{ϵ_0} gilt dann:

$$2\,\mathrm{Re}\{\bar{f} v_{\epsilon_0}\} = 2\,\mathrm{Re}\{-iy(\epsilon_0 + i\epsilon_0)\} = 2y\epsilon_0 > 2\epsilon_0^2 = |\, v_{\epsilon_0}|^2.$$

Setzt man $v_\lambda := v_{\epsilon_0}$, dann ist (R1) und (R2) erfüllt.

Wir haben also gezeigt, daß V regulär, jedoch nicht stark regulär ist.

Wir können an diesem Beispiel auch sehen, daß das Kriterium von Satz 3.2 für reguläre Funktionensysteme nicht notwendig ist. Die oberhalbstetige Abbildung H werde repräsentiert durch die zweipunktige Menge $\{z_1 = 1 + \frac{1}{2}i,\ z_2 = -1 + \frac{1}{2}i\}$. Dann ist $v_0 = 0$ Minimallösung zu H, denn gäbe es bessere Approximationen als 0, dann müßten diese im schräg

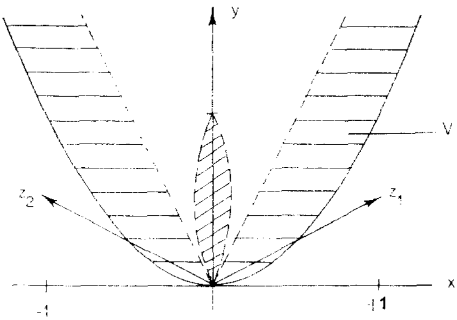

ABBILDUNG 3.

schraffierten Teil der Abb. 3 liegen. Setzen wir nun $v = 4 + 16i$, dann ist $v \in V$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
&\min_{(x,z)\in D[H,v_0]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \\
&\quad = \min_{i=1,2} \operatorname{Re}\{\overline{z_i}v\} \\
&\quad = \min[\operatorname{Re}\{(1 - \tfrac{1}{2}i)(4 + 16i)\}, \operatorname{Re}\{(-1 - \tfrac{1}{2}i)(4 + 16i)\}] \\
&\quad = \min\{4 + 8, -4 + 8\} > 0.
\end{aligned}$$

Nach dem Parameter differenzierbare Annäherungsfunktionen

V sei eine Menge von Elementen $v(a, x)$ aus $C(B)$, die von einem Parameter $a \in A$ abhängen. A sei eine offene Teilmenge eines Banachraumes E, dessen Norm wir mit $\|\cdot\|_E$ bezeichnen. Wir setzen voraus, daß $v(a, \cdot)$ für jeden Parameter $a \in A$ eine Fréchetsche Ableitung nach dem Parameter a besitzt. Dabei heißt $v(a, \cdot)$ an der Stelle a Fréchet-differenzierbar, wenn es eine beschränkte, für alle $b \in E$ lineare Abbildung des Banachraums E in den linearen Raum $C(B)$ gibt (deren Wirkung auf ein Element $b \in E$ wir mit

$$F[b; a, \cdot]: B \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto F[b; a, x]$$

bezeichnen), so daß

$$\| v(a + b, \cdot) - v(a, \cdot) - F[b; a, \cdot]\| = o(\| b \|_E) \qquad \text{für} \quad \| b \|_E \to 0.$$

Die Abbildung $F[b; a, \cdot]$ heißt die Fréchetsche Ableitung von $v(a, \cdot)$ nach dem Parameter a. Mit $\mathscr{L}[a]$ bezeichnen wir den linearen Teilraum von $C(B)$, der von allen Elementen $F[b; a, \cdot]$ mit $b \in E$ aufgespannt wird. Die Dimension dieses Raumes sei $d[a]$.

Zur Abkürzung führen wir noch folgende Bezeichnung ein: Eine Teilmenge $V \subset C(B)$ hat die Eigenschaft (D), wenn gilt: Die Elemente $v(a, \cdot) \in V$ hängen von einem Parameter a ab, der in einer offenen Menge A eines Banachraums E variiert. Ferner existiere für alle $a \in A$ die Fréchetsche Ableitung nach a.

Wir wollen im folgenden für solche Funktionensysteme ein notwendiges Kriterium für eine Minimallösung angeben. Meinardus und Schwedt [14] haben diesen Satz für die Tschebyscheffapproximation stetiger Funktionen bewiesen.

SATZ 3.9. *V sei eine Teilmenge von $C(B)$ mit der Eigenschaft (D). Ist $v(a, \cdot)$ eine Minimallösung für die oberhalbstetige Abbildung H: $B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$, so gilt für alle $b \in E$:*

$$\min_{(x,z) \in D[H, v(a,\cdot)]} \mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[b; a, x]\} \leqslant 0.$$

Beweis. Wir nehmen indirekt an, es gebe ein $b \in E$ mit

$$\min_{(x,z) \in D[H, v(a,\cdot)]} \mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[b; a, x]\} > 0.$$

Dann gibt es eine reelle Zahl $\alpha > 0$ und eine offene Umgebung U von $D[H, v(a, \cdot)]$ in $B \times H(B)$, so daß

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[b; a, x]\} \geqslant 2\alpha$$

ist für $(x, z) \in U$. Da nun A eine offene Menge von E ist, gibt es ein t_0, so daß für alle t mit $0 \leqslant t < t_0$ der Parameter $a + tb$ in A liegt.

Für $(x, z) \in U$ und $t \to 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(v(a + tb, x) - v(a, x))\} \\
&\quad = \mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[tb; a, x]\} \\
&\qquad + \mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(v(a + tb, x) - v(a, x) - F[tb; a, x])\} \\
&\quad \geqslant 2\alpha t - |z - v(a, x)| \cdot |v(a + tb, x) - v(a, x) - F[tb; a, x]| \\
&\quad = 2\alpha t - o(t).
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt wegen der Beschränktheit von $|z - v(a, x)|$ in U.

Es gibt also eine reelle positive Zahl $t_1 < t_0$, so daß für alle t mit $0 < t \leqslant t_1$ und alle $(x, z) \in U$ gilt:

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(v(a + tb, x) - v(a, x))\} \geqslant \alpha t. \tag{3.6}$$

Weiterhin gilt für $t \to 0$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\| v(a + tb, \cdot) - v(a, \cdot)\| \\
&\quad \leqslant \| F[tb; a, \cdot]\| + \| v(a + tb, \cdot) - v(a, \cdot) - F[tb; a, \cdot]\| \\
&\quad = t \cdot \| F[b; a, \cdot]\| + o(t).
\end{aligned}$$

Es gibt also eine positive Zahl $t_2 \leqslant t_1$, so daß für alle t mit $0 < t \leqslant t_2$ gilt:

$$\| v(a + tb, \cdot) - v(a, \cdot)\| \leqslant 2t \cdot \| F[b; a, \cdot]\|. \tag{3.7}$$

Aus (3.6) folgt nun für $(x, z) \in U$ und $0 < t < t_3$ mit

$$t_3 := \min \left(t_2, \frac{\alpha}{2\| F[b; a, \cdot]\|^2}\right):$$

$$\begin{aligned}
| v(a + tb, x) - v(a, x)|^2 &\leqslant 4t^2 \cdot \| F[b; a, \cdot]\|^2 \\
&= 2\alpha t \, \frac{2 \| F[b; a, \cdot]\|^2 \, t}{\alpha} \\
&< 2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(v(a + tb, x) - v(a, x))\}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Der weitere Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.5. Aus (3.8) folgt nämlich für $(x, z) \in U$ und $0 < t < t_3$:

$$\begin{aligned}
&| v(a + tb, x) - z |^2 \\
&\quad = | v(a, x) - z |^2 - 2 \operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(v(a + tb, x) - v(a, x))\} \\
&\qquad + | v(a + tb, x) - v(a, x)|^2 \\
&\quad < | v(a, x) - z |^2.
\end{aligned}$$

$W_1 := B \times H(B) - U$ ist abgeschlossen in $B \times H(B)$, ebenso

$$W := \{(x, z) \in W_1 \mid z \in H(x)\}.$$

Wieder ist

$$E^* := \max_{(x,z)\in W} | v(a, x) - z | < \Delta(v(a, \cdot)).$$

Wir wählen nun eine positive Zahl τ mit

$$\tau < \min \left(t_3, \frac{\Delta(v(a, \cdot)) - E^*}{2 \| F[b; a, \cdot]\|}\right),$$

dann folgt für $(x, z) \in W$ aus (3.7):

$$
\begin{aligned}
|v(a+\tau b, x) - z| &\leqslant |v(a+\tau b, x) - v(a, x)| + |v(a, x) - z| \\
&\leqslant 2\tau \| F[b; a, \cdot] \| + E^* \\
&< \Delta(v(a, \cdot)).
\end{aligned}
$$

Damit gilt also insgesamt:

$$\Delta(v(a + \tau b, \cdot)) < \Delta(v(a, \cdot)).$$

Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich noch folgendes notwendige Kriterium für endlichdimensionales $\mathscr{L}[a]$.

SATZ 3.10. *V sei eine Teilmenge von $C(B)$, die die Eigenschaft (D) erfüllt. Ist $v(a, \cdot)$ eine Minimallösung für die oberhalbstetige Abbildung H: $B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ und hat $\mathscr{L}[a]$ die endliche Dimension d, dann ist der Nullvektor in der konvexen Hülle der Menge $S := \{(z - v(a, x)) \overline{\mathfrak{B}(x)} \mid (x, z) \in D[H, v(a, \cdot)]\}$ enthalten, wobei $\mathfrak{B}(x) = (b_1(x), \ldots, b_d(x))$ ist und $b_1, b_2, \ldots, b_d$ eine Basis von $\mathscr{L}[a]$ bilden.*

Beweis. Nehmen wir an, der Nullvektor liege nicht in der konvexen Hülle der Menge S. Dann gibt es nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen einen d-dimensionalen Vektor c, so daß

$$\operatorname{Re}\{\langle c, s \rangle\} > 0 \qquad \text{für alle} \quad s \in S.$$

Nun gilt aber:

$$\operatorname{Re}\{\langle c, s \rangle\} = \operatorname{Re}\left\{\overline{(z - v(a, x))} \sum_{i=1}^{d} c_i b_i(x)\right\}.$$

Deshalb ist also für das Element $\sum_{i=1}^{d} c_i b_i(x) \in \mathscr{L}[a]$

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{(z - v(a, x))} \sum_{i=1}^{d} c_i b_i(x)\right\} > 0 \qquad \text{für alle} \quad (x, z) \in D[H, v(a, \cdot)].$$

Nach dem vorhergehenden Satz kann dann $v(a, \cdot)$ keine Minimallösung sein.

Wir wollen jetzt untersuchen, wann die Bedingungen der beiden vorhergehenden Sätze auch hinreichend sind für eine Minimallösung. Dazu sei wie bei Brosowski [5] V ein asymptotisch konvexes Funktionensystem, das der Bedingung (D) genügt. Nach Definition der asymptotischen Konvexität gibt es für $a, b \in A$ einen Parameter $a(t) \in A$, so daß für $t \to 0$

$$\|(1 - tg(\cdot, t))\, v(a, \cdot) + tg(\cdot, t)\, v(b, \cdot) - v(a(t), \cdot)\| = o(t).$$

Wir nehmen weiter an, daß das System der folgenden Bedingung (B) genüge:

(B) 1. Die Abbildung $a(t)$ des Intervalls $[0, 1]$ in $A \subset E$ sei rechtsseitig Fréchet-differenzierbar im Punkt 0.

2. $a(0) = a$.

Deswegen gilt für $0 < t \leqslant 1$:

$$a(t) - a = a(t) - a(0) = ta'(0) + r(t)$$

mit

$$\frac{\| r(t)\|_E}{t} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Aus der Definitionsgleichung für asymptotische Konvexität folgt für $t \to 0$:

$$\left\| \frac{v(a(t), \cdot) - v(a, \cdot)}{t} - g(x, t)(v(b, \cdot) - v(a, \cdot))\right\| = o(1). \tag{3.9}$$

Wegen der Bedingung (D) folgt für $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{v(a(t), \cdot) - v(a, \cdot)}{t} - \frac{F[a(t) - a; a, \cdot]}{t} \right\| \\
&= \left\| \frac{v(a(t), \cdot) - v(a, \cdot)}{t} - F\left[a'(0) + \frac{r(t)}{t}; a, \cdot\right]\right\| \\
&= \left\| \frac{v(a(t), \cdot) - v(a, \cdot)}{t} - F[a'(0); a, \cdot] - F\left[\frac{r(t)}{t}; a, \cdot\right]\right\| \\
&= \frac{o(\| a(t) - a \|_E)}{t} = o(1).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Da nun

$$\left\| F\left[\frac{r(t)}{t}; a, \cdot\right]\right\| \to 0 \qquad \text{für} \quad t \to 0,$$

folgt also aus (3.9) und (3.10) für alle $x \in B$:

(F) $F[a'(0); a, x] = g(x, 0)(v(b, x) - v(a, x))$.

Diese Formel stammt von Brosowski [5].

Wir erhalten nun die Umkehrung von Satz 3.9.

SATZ 3.11. *V sei ein asymptotisch konvexes Funktionensystem, das den Bedingungen (B) und (D) genügt. Dann ist $v(a, \cdot) \in V$ genau dann eine Mini-*

mallösung für die oberhalbstetige Abbildung $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$, *wenn für alle* $b \in E$ *die Ungleichung*

$$\min_{(x,z)\in D[H,v(a,\cdot)]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[b; a, x]\} \leqslant 0 \text{ gilt.}$$

Beweis. Wegen Satz 3.9 brauchen wir nur noch zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist: Für alle $(x, z) \in D[H, v(a, \cdot)]$ gilt bei beliebigem $b \in A$ wegen Formel (F):

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[a'(0); a, x]\} \\ &\quad = g(x, 0) \operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(v(b, x) - v(a, x))\}. \end{aligned}$$

Da $g(x, 0) > 0$ ist für alle $x \in B$, folgt also:

$$\min_{(x,z)\in D[H,v(a,\cdot)]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(v(b, x) - v(a, x))\} \leqslant 0.$$

Wegen Satz 3.2 ist damit $v(a, \cdot)$ Minimallösung zu H.

Um die Umkehrung von Satz 3.10 zu erhalten, brauchen wir noch einen Satz von Carathéodory über konvexe Mengen.

HILFSSATZ 3.2. (Carathéodory). *Jeder Punkt der konvexen Hülle einer Teilmenge* A *eines* n*-dimensionalen reellen (komplexen) linearen Raumes ist als konvexe Linearkombination von höchstens* $n + 1(2n + 1)$ *Punkten aus* A *darstellbar.*

Beweis. Vgl. Cheney [6, Seite 17].

SATZ 3.12. V *sei ein asymptotisch konvexes Funktionensystem mit den Eigenschaften* (B) *und* (D). *Weiterhin habe* $\mathscr{L}[a]$ *die endliche Dimension* d. *Dann ist* $v(a, \cdot)$ *genau dann eine Minimallösung für die oberhalbstetige Abbildung* $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$, *falls der Nullvektor in der konvexen Hülle der Menge* S *liegt* (S *wie in Satz* 3.10).

Beweis. Wir brauchen nur noch die Hinlänglichkeit zu zeigen: Sei also $0 \in \operatorname{conv}(S)$. Nach dem Satz von Carathéodory gibt es nun endlich viele Vektoren

$$\overline{z_1 - v(a, x_1)}\, \overline{\mathfrak{B}(x_1)},\ \overline{z_2 - v(a, x_2)}\, \overline{\mathfrak{B}(x_2)}, \ldots,\ \overline{z_n - v(a, x_n)}\, \overline{\mathfrak{B}(x_n)}$$

mit $(x_i, z_i) \in D[H, v(a, \cdot)]$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ und

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{(z_i - v(a, x_i))}\, \overline{\mathfrak{B}(x_i)} = 0.$$

Dabei ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ und $\alpha_i \geqslant 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

Für jeden Vektor $c \in \mathbb{C}^d$ gilt dann:

$$0 = \left\langle c, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(z_i - v(a, x_i)) \overline{\mathfrak{B}(x_i)} \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{(z_i - v(a, x_i))} \sum_{k=1}^{d} c_k b_k(x_i).$$

Damit gilt auch:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} \left\{ \overline{(z_i - v(a, x_i))} \sum_{k=1}^{d} c_k b_k(x_i) \right\}.$$

Da $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ und $\alpha_i \geqslant 0$ für $i = 1, 2,..., n$, folgt:

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re} \left\{ \overline{(z_i - v(a, x_i))} \sum_{k=1}^{d} c_k b_k(x_i) \right\} \leqslant 0.$$

Daraus folgt aber:

$$\min_{(x,z) \in D[H, v(a,\cdot)]} \operatorname{Re} \left\{ \overline{(z - v(a, x))} \sum_{k=1}^{d} c_k b_k(x) \right\} \leqslant 0.$$

Da $b_1, b_2, ..., b_d$ eine Basis von $\mathscr{L}[a]$ bilden und c beliebig war, ergibt sich für alle $b \in E$:

$$\min_{(x,z) \in D[H, v(a,\cdot)]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[b; a, x]\} \leqslant 0.$$

Also ist $v(a, \cdot)$ wegen Satz 3.11 Minimallösung zu H.

Eindeutigkeitskriterien

Bevor wir zu den Eindeutigkeitssätzen kommen, wollen wir noch eine Bezeichnung einführen. V sei wieder eine Teilmenge von $C(B)$ und v_0 ein Element aus V.

DEFINITION 3.4. Eine Teilmenge $B^* \subset B \times \mathbb{C}$ heißt *extremal für v_0 bezüglich V*, falls B^* kompakt ist und für alle $v \in V$ die Ungleichung

$$\min_{(x,z) \in B^*} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v(x) - v_0(x))\} \leqslant 0$$

erfüllt ist.

Mit dieser Definition läßt sich Satz 3.5 auch so formulieren.

SATZ 3.5a. *$V \subset C(B)$ sei stark regulär bei $v_0 \in V$ und $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ oberhalbstetig. Dann ist v_0 genau dann Minimallösung zu H, falls $D[H, v_0]$ extremal ist für v_0 bezüglich V.*

SATZ 3.13. *Das Funktionensystem $V \subset C(B)$ sei stark regulär und v_0 sei Minimallösung für die oberhalbstetige Abbildung $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$. Dann ist die Minimallösung eindeutig bestimmt, falls gilt: Ist $v(x) = v_0(x)$ auf einer Extremalmenge für v_0 bezüglich V, die in $D[H, v_0]$ enthalten ist, so ist $v(x) \equiv v_0(x)$.*

Beweis. Ist v_1 eine weitere Minimallösung zu H, dann gilt für alle $(x, z) \in D[H, v_0]$:

$$|z - v_1(x)|^2 = |z - v_0(x)|^2 - 2\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_1(x) - v_0(x))\} + |v_1(x) - v_0(x)|^2 \leq |z - v_0(x)|^2. \tag{3.11}$$

Daraus folgt also für $(x, z) \in D[H, v_0]$:

$$2\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_1(x) - v_0(x))\} \geq |v_1(x) - v_0(x)|^2 \geq 0. \tag{3.12}$$

Nach dem Charakterisierungssatz für stark reguläre Funktionensysteme bei v_0 (Satz 3.5) muß aber gelten:

$$\min_{(x,z)\in D[H,v_0]} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_1(x) - v_0(x))\} \leq 0.$$

Deshalb existiert mindestens ein $(x', z') \in D[H, v_0]$ mit

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z' - v_0(x'))}(v_1(x') - v_0(x'))\} = 0.$$

Für dieses (x', z') gilt dann nach (3.12): $v_1(x') = v_0(x')$. Wir definieren nun:

$$D' := \{(x, z \in D[H, v_0] \mid v_0(x) = v_1(x)\}.$$

Nach dem vorhergehenden ist D' nicht leer, und D' ist abgeschlossen als Urbild von $\{0\}$ bei der stetigen Abbildung:

$$D[H, v_0] \to \mathbb{C}$$
$$(x, z) \mapsto v_1(x) - v_0(x).$$

Wir wollen zeigen, daß D' extremal ist für v_0 bezüglich V:

Nehmen wir an, dies sei falsch. Dann existiert ein $v_2 \in V$ mit

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_2(x) - v_0(x))\} > 0 \qquad \text{für alle} \quad (x, z) \in D'.$$

Da D' kompakt ist und $v_0(x) = v_1(x)$ für $(x, z) \in D'$, gibt es eine offene Umgebung $U \subset D[H, v_0]$ von D' und eine Zahl $\alpha > 0$, so daß

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_2(x) - v_1(x))\} > \alpha \qquad \text{für alle} \quad (x, z) \in U.$$

Wegen (3.12) gibt es eine Zahl $\mu > 0$ mit

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_1(x) - v_0(x))\} \geqslant \mu \qquad \text{für alle} \quad (x, z) \in D[H, v_0] - U.$$

Wählen wir $\lambda > 0$ so, daß $\lambda \cdot \Delta(v_0) < \mu/2$, dan gibt es wegen der starken Regularität von V bei v_1 ein $v_\lambda \in V$ mit:

(1) $\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_1(x))\} > 0 \qquad \text{für alle} \quad (x, z) \in \overline{U}.$

(2) $\| v_\lambda - v_1 \| < \lambda.$

Aus (1) und (3.12) folgt durch Addition für $(x, z) \in U$:

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > 0.$$

Für $(x, z) \in D[H, v_0] - U$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} \\
&\quad = \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_1(x)) + \mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_1(x) - v_0(x))\} \\
&\quad \geqslant \mu - | z - v_0(x) | \cdot \| v_\lambda - v_1 \| > \mu - \lambda \cdot | z - v_0(x) | \\
&\quad > \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für alle $(x, z) \in D[H, v_0]$, falls $\lambda \cdot \Delta(v_0) < \mu/2$:

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v_0(x))}(v_\lambda(x) - v_0(x))\} > 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu Satz 3.5. Also ist D' extremal für v_0 bezüglich V und damit $v_1(x) \equiv v_0(x)$.

V sei nun wieder eine Teilmenge aus $C(B)$ mit der Eigenschaft (D) (Fréchet-Differenzierbarkeit).

DEFINITION 3.5. V erfüllt *die Haarsche Bedingung bei $a \in A$*, wenn es eine natürliche Zahl $n[a]$ gibt, so daß jedes Element aus $\mathscr{L}[a]$, das nicht identisch null ist, höchstens $n[a] - 1$ Nullstellen in B hat und folgende Aufgabe lösbar ist: (I_n) Zu je $n[a]$ verschiedenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{n[a]}$ aus B und zu je $n[a]$ Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{n[a]}$ aus $\mathbb{C}$ gibt es mindestens ein Element $F[b; a, \cdot] \in \mathscr{L}[a]$, das den Gleichungen

$$F[b; a, x_i] = c_i \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n[a] \quad \text{genügt.}$$

Nach Brosowski [5] erfüllt V *die lokale Haarsche Bedingung*, falls für jedes $a \in A$ eine natürliche Zahl $n[a]$ mit obigen Eigenschaften existiert.

Bemerkung. Falls V die Haarsche Bedingung bei $a \in A$ erfüllt, dann ist (I_n) eindeutig lösbar.

Wir wollen noch untersuchen, wie die Zahl $n[a]$ mit der Dimension von $\mathscr{L}[a]$ zusammenhängt.

SATZ 3.14. *V erfülle die Haarsche Bedingung bei $a \in A$ und $d[a] = \dim \mathscr{L}[a]$ sei endlich. Dann ist $n[a] = d[a]$.*

Beweis. Ist $b_1, b_2, \ldots, b_d$ eine Basis von $\mathscr{L}[a] (d = d[a])$, dann gibt es Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_d$ aus B, so daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} b_1(x_1) & \cdots & b_d(x_1) \\ b_1(x_2) & \cdots & b_d(x_2) \\ \vdots & & \vdots \\ b_1(x_d) & \cdots & b_d(x_d) \end{pmatrix}$$

den Rang d hat. Also muß wegen der Lösbarkeit von (I_n) $n[a] \leqslant d[a]$ sein. Da aber die Lösung eindeutig sein soll, folgt $n[a] = d[a]$.

SATZ 3.15. *$V \subset C(B)$ erfülle die Eigenschaft (D) und die Haarsche Bedingung bei $a \in A$ und sei stark regulär. Weiterhin sei $v(a, \cdot)$ Minimallösung für die oberhalbstetige Abbildung $H: B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ und die Differenz*

$$v(b, x) - v(a, x)$$

habe für jedes $b \in A$ entweder höchstens $n[a]$ Nullstellen in B oder sie verschwinde identisch.

Ist dann für je zwei Punkte (x, z) und (x, z') aus $D[H, v(a, \cdot)]$

$$\mathrm{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(z' - v(a, x))\} > 0,$$

dann ist die Minimallösung eindeutig bestimmt.

Beweis. Ist $\rho_V(H) = 0$, dann ist $H = v(a, \cdot)$ und es ist nichts zu zeigen.

Sei nun $\rho_V(H) > 0$ und $v(b, \cdot)$ eine weitere Minimallösung. Nach dem Beweis von Satz 3.13 ist die Menge

$$D' := \{(x, z) \in D[H, v(a, \cdot)] \mid v(b, x) = v(a, x)\}$$

extremal für $v(a, \cdot)$ bezüglich V und nicht leer.

Wir wollen nun zeigen, daß D' mindestens $n[a] + 1$ Punkte mit verschiedener erster Koordinate enthält:

Dazu nehmen wir indirekt an, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ seien diejenigen verschiedenen Punkte aus B ($1 \leqslant m \leqslant n[a]$), für die $z_i \in H(x_i)$ existieren, so daß $(x_i, z_i) \in D'$ für $i = 1, 2, \ldots, m$. Dann können wir wegen der Haarschen Bedingung bei a ein Element $F[b'; a, \cdot]$ so wählen, daß

$$F[b'; a, x_i] = z_i - v(a, x_i) \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Für (x_i, z_i) gilt nun, da $\rho_V(H) > 0$ ist:

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z_i - v(a, x_i))}\, F[b'; a, x_i]\} = \operatorname{Re}\{\overline{(z_i - v(a, x_i))}(z_i - v(a, x_i))\} > 0.$$

Für (x_i, z_i) und (x_i, z_i') aus D' gilt nach Voraussetzung:

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z_i' - v(a, x_i))}\, F[b'; a, x_i]\} = \operatorname{Re}\{\overline{(z_i' - v(a, x_i))}(z_i - v(a, x_i))\} > 0.$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\min_{(x,z)\in D'} \operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}\, F[b'; a, x]\} > 0. \tag{3.13}$$

Sei nun $B' := \{x \in B \mid v(a, x) = v(b, x)\}$.

B' ist abgeschlossen in B und für die Einschränkung von H auf B', die wir mit $H \mid B'$ bezeichnen, gilt:

$$D[H \mid B', v(a, \cdot)] = D'.$$

Aus Satz 3.5a folgt dann, daß $v(a, \cdot)$ Minimallösung ist zu $H \mid B'$. Dagegen ergibt sich wegen Satz 3.9 aus (3.13), daß dies nicht der Fall sein kann. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß D' mindestens $n[a] + 1$ Punkte mit verschiedener erster Koordinate enthält.

Nach Voraussetzung gilt dann:

$$v(b, \cdot) = v(a, \cdot).$$

Für asymptotisch konvexe Funktionensysteme, die der Formel (F) genügen, gilt Satz 3.15 unter etwas schwächeren Voraussetzungen. Zunächst ergibt sich aus Formel (F) sofort.

HILFSSATZ 3.3 (Brosowski [5]). *Es sei V eine asymptotisch konvexe Teilmenge eon $C(B)$, deren Elemente der Formel (F) genügen. Erfüllt V die Haarsche Bedingung bei $a \in A$, dann hat die Differenz*

$$v(b, x) - v(a, x)$$

entweder höchstens $n[a] - 1$ Nullstellen in B oder sie verschwindet identisch. Mit diesem Hifssatz und Satz 3.15 ergibt sich diesem Satz.

SATZ 3.16. *V sei ein asymptotisch konvexes Funktionensystem, das den Bedingungen (B) und (D) genügt.*

Erfüllt V die Haarsche Bedingung bei $a \in A$ und ist $v(a, \cdot)$ Minimallösung zur oberhalbstetigen Abbildung H: $B \to \mathscr{K}(\mathbb{C})$ mit

$$\operatorname{Re}\{\overline{(z - v(a, x))}(z' - v(a, x))\} > 0$$

für je zwei Punkte (x, z) und (x, z') aus $D[H, v(a, \cdot)]$, dann ist die Minimallösung eindeutig bestimmt.

Für den Spezialfall der linearen Simultanapproximation wurde dieser Satz von Diaz und McLaughlin bewiesen [10].

LITERATUR

1. C. BERGE, "Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques," Dunod, Paris, 1959.
2. N. BOURBAKI, "General Topology," Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.
3. B. BROSOWSKI, Über die Eindeutigkeit der asymptotisch konvexen Tschebyscheff-Approximationen, *in* "Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik," Tagungen in Oberwolfach 1965 (L. Collatz, G. Meinardus, und H. Unger, Eds.), pp. 9–17, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1967.
4. B. BROSOWSKI, Über Tschebyscheffsche Approximationen durch asymptotisch konvexe Funktionenfamilien, *Computing* **1** (1966), 214–233.
5. B. BROSOWSKI, Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968.
6. E. W. CHENEY, "Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill, New York, 1966.
7. E. W. CHENEY UND H. L. LOEB, Generalized rational approximation, *J. SIAM Numer. Anal. Ser. B* **1** (1964), 11–25.
8. L. COLLATZ, Approximation von Funktionen bei einer und bei mehreren Veränderlichen, *Z. Angew. Math. Mech.* **36** (1956), 198–211.
9. J. B. DIAZ UND H. W. MCLAUGHLIN, Simultaneous approximation of a set of bounded real functions, *Math. Comp.* **23** (1969), 583–593.
10. J. B. DIAZ UND H. W. MCLAUGHLIN, Simultaneous Chebyshev approximation of a set of bounded complex-valued functions, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 419–432.
11. C. B. DUNHAM, Simultaneous Chebyshev approximation of functions on an interval, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967), 472–477.

12. H. HAHN, "Reelle Funktionen," Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.
13. G. MEINARDUS, Invarianz bei linearen Approximationen, *Arch. Rational Mech. Anal.* **14** (1963), 301–303.
14. G. MEINARDUS UND D. SCHWEDT, Nicht-lineare Approximationen, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17** (1964), 297–326.
15. E. MICHAEL, Topologies on spaces of subsets, *Transl. Amer. Math. Soc.* **71** (1951), 152–182.
16. J. R. RICE, "The Approximation of Functions," Vol. I—Linear Theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964.